

מעגלים משיקים – חורף תשע"ז 2017 שאלה 4 – לדה סמירנוף

חומר לימוד:

פתרון בעיות גיאומטריות ברמת בגרות

כיתה:

י"א

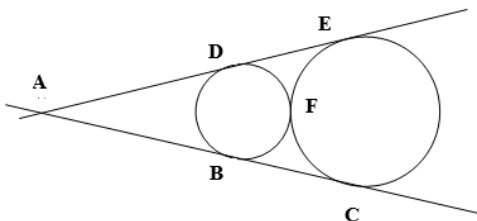
ידע נדרש:

הגדרות: טרפז וטרפז שווה שוקיים, ישרים מקבילים, קטע אמצעים בטרפז, משיק למעגל.

משפטים: משיק למעגל ורדיוס מאונכים זה לזה בנקודת ההשקה; הקטע שמחבר מרכז מעגל עם נקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל חוצה את הזווית בין שני המשיקים; במשולש שווה שוקיים הגובה לבסיס, התיכון לבסיס וחוצה זווית הראש מתלכדים זה עם זה; שני משיקים למעגל שיוצאים מאותה נקודה שווים באורכם (מהנקודה המשותפת ועד לנקודות ההשקה); היחס בין רדיוסים של מעגלים החוסמים את משולשים דומים שווה ליחס הדמיון; דמיון משולשים.

בעיית המטרה

נתונים שני מעגלים בעלי רדיוס שונה, המשיקים זה לזה מבחוץ בנקודה F .



AC משיק לשני המעגלים בנקודות B ו- C ,

AE משיק לשני המעגלים בנקודות D ו- E , כמתואר בציור.

1. הוכיחו שהמרובע $BDEC$ הוא טרפז שווה שוקיים.

2. משיק המשותף למעגלים העובר בנקודה F חותך את שוקי הטרפז, BC ו- DE , בנקודות G ו- H בהתאמה.

הוכיחו: GH הוא קטע אמצעים בטרפז.

3. נסמן ב- R את רדיוס המעגל הגדול וב- r את רדיוס המעגל הקטן.

הוכיחו כי: $R \cdot BD = r \cdot CE$.

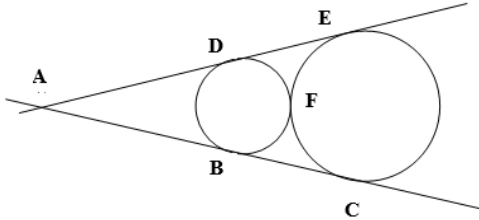
במידת הצורך פתרו את הבעיות במדרגה 1

מדרגה 1

1.1 היזכרו במשפטים הקשורים במושגים שמוזכרים בשאלה ופתרו אותה.

פתרתם את הבעיות במדרגה 1? חזרו לבעיית המטרה, או,

במידת הצורך, פתרו את הבעיות במדרגה 2

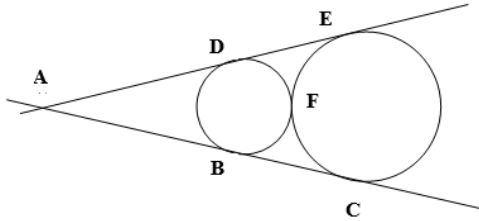
מדרגה 2


- 2.1 הביעו את קטע DE בעזרת AE .
- 2.2 הביעו את קטע BC בעזרת AC .
- 2.3 מה הוא הקשר ($=, <, >$) שבין קטעים DE ו- BC ?
- 2.4 סמנו בנקודות O_1 ו- O_2 את מרכזים של מעגלים קטן וגדול בהתאמה.
- חברו את הקטעים: AO_1 ו- AO_2 . מה אפשר לומר על AO_1 ו- AO_2 ? נמקו.
- 2.5 הוכיחו כי DB מקביל ל- EC .
- 2.6 הסיקו מסקנה לגבי מרובע $BDEC$.
- 2.7 העבירו את המשיק המשותף לשני המעגלים וסמנו אותו ב- HG (H על AD , G על AC). רשמו את היחסים בין האורכים של הקטעים DH ו- HE , GC ו- BG .
- 2.8 הסיקו מסקנה לגבי קטע HG .
- 2.9 התבוננו במשולשים EO_2C ו- DO_1B . הסיקו את המסקנה הנדרשת.

אחרי שפתרתם את הבעיות במדרגה 2, פתרו את בעיית המטרה, או, במידת הצורך, פתרו את הבעיות במדרגה 3

מדרגה 3

3.1 סמנו את אורך הקטע $DE = a$ ו- $AD = b$. בטאו את האורכים של הקטעים AB ו- BC .



3.2 השלימו בעזרת $<$, $>$ או $=$: DE _____ BC . נמקו.

3.3 סמנו ב- O_1 את מרכז המעגל הקטן. חברו את: AO_1 .

סמנו ב- K את נקודת חיתוך של DB ו- AO_1 .

הוכיחו: $AK \perp DB$.

3.4 סמנו ב- O_2 את מרכז המעגל הגדול.

האם הישרים AO_1 ו- AO_2 מתלכדים? נמקו.

3.5 הוכיחו: $AO_2 \perp EC$.

3.6 האם DB מקביל ל- EC ? נמקו.

3.7 הסיקו מסקנה לגבי מרובע $BDEC$.

3.8 סמנו ב- H את נקודת החיתוך של המשיק המשותף לשני מעגלים עם AE .

סמנו ב- G את נקודת החיתוך שלו עם AC .

מה הקשר בין שני הישרים היוצאים מהנקודה H למעגל הקטן? נמקו.

מה הקשר בין שני הישרים למעגל הגדול? נמקו.

3.9 רשמו את היחסים בין האורכים של הקטעים HE ו- DH , GC ו- BG .

3.10 הסיקו מסקנה לגבי הקטע HG בטרפז $BDEC$.

3.11 סמנו $\alpha = \angle O_2EC$. בטאו את הזוויות הבאות בעזרת α :

$\angle HDB$, $\angle O_1DB$, הזווית הצמודה ל- $\angle HEO_2$.

3.12 הסיקו מסקנות לגבי משולשים DO_1B ו- EO_2C .

3.13 רשמו את היחס בין הצלעות המתאימות במשולשים הנ"ל.

סמנו: $EO_2 = R$ ו- $DO_1 = r$. הסיקו מסקנות לגבי R ו- r .

אחרי שפתרתם את הבעיות במדרגה 3 פתרו את בעיית המטרה