הסתברות - בוחרים מטבעות מתוך שקים

חומר לימוד: פתרון בעיות מורכבות באמצעות "דיאגרמות עץ"

המשימה מתאימה לתרגול מתקדם של פתרון בעיות באמצעות "דיאגרמות עץ". מודגשת החשיבות להתאמת החישוב ל"סיפור" המתואר בבעיה. במשימה מוצגת בעיה שנפתרת באמצעות עץ תלת שלבי בעל הסתברויות קבועות, או בעיה שנפתרת באמצעות עץ ארבע שלבי, בו השלב הראשון שונה משלושת האחרים. המשימה מטפלת ב"מסלולים שונים" על העץ ובמושג ההסתברות המותנית. ניתן להשתמש בנוסחת ברנולי, אך שלושה שלבים מאפשרים לפתור את הבעיה גם באופן ישיר, ללא שימוש בנוסחה.

כיתה: י"א

מבנה המשימה: בעיית מטרה ושלוש מדרגות.

ידע קודם:

- בניית דיאגרמת עץ
- חישוב הסתברויות באמצעות כפל הסתברויות וחיבור הסתברויות
- נוסחת ההסתברות המותנית

מטרות לימודיות:

- התאמה מדוייקת בין הסיפור לחישוב ההסתברותי. הבחנה במספר מסלולים על העץ.
- פתרון בעיה מורכבת באמצעות מקרה פשוט יותר, כאסטרטגיה לפתרון בעיות.

משימת המטרה: נתונים תשעה שקים בשלושה צבעים ובהם מטבעות זהב וכסף

א. יש לבחור שק ואח"כ מטבע מסוג מסוים.

ב. בחירת מטבעות מסוג מסוים, לאו דווקא מאותו שק.

ג. נתונים פתרונות, יש להתאים להם סיפור.

מדרגה 1: נתונים שלושה שקים כל אחד בצבע שונה

א. יש לבחור שק ואח"כ מטבע מסוג מסוים.

ב. בחירת מטבעות מסוג מסוים, לאו דווקא מאותו שק.

ג. נתונים פתרונות, יש להתאים להם סיפור.

מדרגה 2: בחירה משק אחד.

בחירת מטבעות מסוג אחד

מדרגה 3: נתונות שאלות ותשובות. יש להתאים בין שאלה לתשובה.

שיטת הוראה:

בכיתה: עבודה עצמאית או בזוגות. המורה יחלק את בעיית המטרה לכולם. מי שמתקשה, יבחר בעצמו או בעזרת המורה את המדרגה המתאימה.

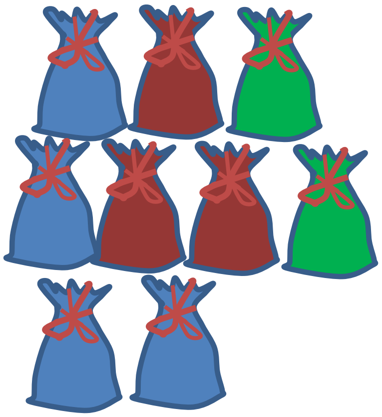
שימוש ביישומונים: אין

אוניברסיטת חיפה University of Haifa جامعة حيفا
החוג לחינוך מתמטי MathEDept
מרכז חמ"ה מרכז לחקר מחוננות והצטיינות Interdisciplinary center for Research and Advancement of Giftedness and Excellence RANGE

THE EDDIE & JULES TRUMP FAMILY FOUNDATION קרן טראמפ

<u>פתרונות חלקיים:</u>

בעיית מטרה - בחירה של מטבעות



תשעה שקים מלאים, כל אחד במספר גדול מאד וזהה של מטבעות. בכל שק מטבעות משני סוגים: זהב וכסף. בין תשעת השקים: שניים ירוקים, שלושה אדומים וארבעה כחולים.

בכל שק ירוק יש 10% מטבעות זהב, השאר הם מטבעות כסף.

בכל שק אדום יש 18% מטבעות זהב, השאר הם מטבעות כסף.

בכל שק כחול יש 20% מטבעות זהב, השאר הם מטבעות כסף.

א. בוחרים שלושה מטבעות באופן הבא:

ראשית בוחרים שק, ואז מוציאים ממנו שלושה מטבעות.

(1) מהי ההסתברות שנבחרו שלושה מטבעות זהב?

ההסתברות לבחור שק ירוק: $\frac{2}{9}$, ההסתברות לבחור שק אדום: $\frac{3}{9}$, ההסתברות לבחור שק כחול: $\frac{4}{9}$.

לכן:

ההסתברות לבחור שלושה מטבעות זהב מהשק הירוק: $\frac{2}{9}\cdot(0.1)^3$

וההסתברות לבחור שלושה מטבעות זהב מהשק הירוק, האדום או הכחול, היא:

$$\frac{2}{9}\cdot(0.1)^3+\frac{3}{9}\cdot(0.18)^3+\frac{4}{9}\cdot(0.2)^3=0.005722$$

(2) מהי ההסתברות שנבחר מטבע זהב אחד בדיוק?

משיקולים דומים: בכל שק יש 3 אפשרויות לבחור מטבע זהב אחד בדיוק (ראשון, שני או שלישי) ולכן:

$$\frac{2}{9}\cdot 3(0.1)(0.9)^2+\frac{3}{9}\cdot 3(0.18)(0.82)^2+\frac{4}{9}\cdot 3(0.2)(0.8)^2=0.345699,$$

(3) מהי ההסתברות שנבחר לפחות מטבע זהב אחד?

מטבע זהב אחד לפחות – רק לא שלושה מטבעות כסף, לכן:

$$1-\left(\frac{2}{9}\cdot(0.9)^3+\frac{3}{9}\cdot(0.82)^3+\frac{4}{9}\cdot(0.8)^3\right)=0.426655$$

(4) ידוע שנבחר מטבע זהב אחד בדיוק. מהי ההסתברות שהוא נבחר מהשק האדום?

ההסתברות לבחור מטבע זהב אחד בדיוק מתוך שלושה, מהשק האדום היא: $\frac{3}{9}\cdot 3(0.18)(0.82)^2$ (*)

לכן, לפי (2), מנת התוצאות בין (*) ל-(2) היא ההסתברות המבוקשת.

כדאי לשים לב לעובדה הבאה:

בחישוב הסתברות מותנית: $\mathrm{P}\left({}^{A}/_{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ המנה היא בין חיתוך מאורעות למאורע כולל. בשאלה שלנו החיתוך בין A ל-B הוא A בעצמו. לכן התוצאה היא מנת הביטויים שכבר חישבנו.

ב. בוחרים שלושה מטבעות, לא בהכרח כולם מאותו השק.

כלומר: בתהליך הבחירה, עבור בחירת כל מטבע, בוחרים מחדש מאיזה שק להוציאו.

(1) מהי ההסתברות לבחור שלושה מטבעות זהב?

כאן, לפני בחירת מטבע בוחרים שק. לכן: $\left(\frac{2}{9}\cdot(0.1)+\frac{3}{9}\cdot(0.18)+\frac{4}{9}\cdot(0.2)\right)^3 = 0.005010$

(2) מהי ההסתברות שנבחר מטבע זהב אחד בדיוק?

נסמן: $p = \left(\frac{2}{9}\cdot(0.1)+\frac{3}{9}\cdot(0.18)+\frac{4}{9}\cdot(0.2)\right)$, אזי: $3p(1-p)^2$

(3) מהי ההסתברות שנבחר לפחות מטבע זהב אחד?

באופן דומה לשאלה קודמת: רק לא כולם כסף, לכן: $1-(1-p)^3 = 0.430506$.

(4) ידוע שנבחר מטבע זהב אחד בדיוק. מהי ההסתברות שהוא נבחר מהשק האדום?

$$\mathrm{P}\left(\text{נבחר מטבע זהב מהשק האדום} \big/ \text{נבחר מטבע זהב אחד בדיוק}\right) =$$

$$= \frac{P(\text{נבחר מטבע זהב אחד בדיוק} \cap \text{נבחר מטבע זהב מהשק האדום})}{P(\text{נבחר מטבע זהב אחד בדיוק})}$$

החישוב כאן לא מיידי, היות והמאורע הידוע אינו מכיל את כל המאורע המותנה. במאורע המותנה אפשר שיהיו בסה"כ יותר ממטבע זהב אחד.

אם כך צריך לחשב את ההסתברות של החיתוך, תוך חשיבה ישירה על תיאור מאורע החיתוך. אין להשתמש בכפל הסתברויות פשוט, היות ולא דנו בסוגיה האם המאורעות תלויים או לא.

החיתוך בין: "נבחר מטבע זהב אחד בדיוק" לבין: "נבחר מטבע זהב מהשק האדום (לפחות אחד, ואולי נבחרו מטבעות זהב אחרים משקים אחרים, או שנבחרו מטבעות כסף בלי חשיבות מאיזה שק)" הוא: "נבחר מטבע זהב מהשק האדום והוא מטבע הזהב היחיד שנבחר מכל השקים", כלומר: המטבע הראשון, השני או השלישי שנבחר הוא זהב מהשק האדום, והשניים האחרים הם כסף ואין חשיבות מאיזה שק נבחרו. לכן:

$$\frac{3\cdot\frac{2}{9}\cdot(0.1)\left[\frac{2}{9}\cdot(0.9)+\frac{3}{9}\cdot(0.82)+\frac{4}{9}\cdot(0.8)\right]^2}{3p(1-p)^2} = \frac{3\cdot\frac{2}{9}\cdot(0.1)(1-p)^2}{3p(1-p)^2} = \frac{\frac{2}{9}\cdot(0.1)}{\frac{2}{9}\cdot(0.1)+\frac{3}{9}\cdot(0.18)+\frac{4}{9}\cdot(0.2)} = \frac{10}{77}$$

בדרך אחרת אפשר להגיע לחישוב זהה:

כאשר אין חשיבות לשקים אפשר לדמיין שכל המטבעות נמצאים בערימה אחת. ההסתברות לבחור מטבע זהב מהערימה כולה היא: $p = \frac{2}{9}\cdot(0.1)+\frac{3}{9}\cdot(0.18)+\frac{4}{9}\cdot(0.2)$.

ההסתברות לבחור מהערימה כולה מטבע זהב שמקורו בשק האדום היא: $\frac{2}{9}\cdot(0.1)$.

כאשר צריך לבחור מטבע זהב אחד בדיוק מתוך שלושה, ובוחרים מכל הערימה, ההסתברות לבחור מטבע כסף היא, כמובן, $1-p$, והחישוב זהה לזה שתואר לעיל.

ג. התאימו "סיפור" (תהליך בחירה, או שאלה) לכל אחד מהחישובים הבאים:

(1) $\frac{2}{9}\cdot 3\cdot 0.9\cdot 0.1^2+\frac{3}{9}\cdot 3\cdot 0.82\cdot 0.18^2+\frac{4}{9}\cdot 3\cdot 0.8\cdot 0.2^2$

זוהי ההסתברות לבחור שני מטבעות זהב מאחד מהשקים.

(2) $3\left(\frac{2}{9}\cdot 0.1+\frac{3}{9}\cdot 0.18+\frac{4}{9}\cdot 0.2\right)^2\cdot\left(\frac{2}{9}\cdot 0.9+\frac{3}{9}\cdot 0.82+\frac{4}{9}\cdot 0.8\right)$

זוהי ההסתברות לבחור שני מטבעות זהב "מהערימה כולה" – כלומר, כאשר בוחרים מחדש את השק לפני הוצאה של כל מטבע.

(3) $\frac{2}{9}\cdot 0.9\cdot 0.1^2$

זוהי ההסתברות לבחור שני מטבעות זהב ואחד כסף מהשק הירוק בסדר מסוים, **למשל**, שני המטבעות הראשונים מתוך שלושה הם זהב והשלישי כסף. כלומר: קודם בוחרים את השק ואז מוציאים ממנו שלושה מטבעות לפי סדר מסוים.

(4)

$$\frac{3\cdot\frac{4}{9}\cdot 0.82\cdot 0.18^2}{3\left(\frac{2}{9}\cdot 0.9\cdot 0.1^2+\frac{3}{9}\cdot 0.82\cdot 0.18^2+\frac{4}{9}\cdot 0.8\cdot 0.2^2\right)}$$

זוהי הסתברות המותנית להוצאת שני מטבעות זהב בדיוק מהשק הכחול, כשידוע שהוצאו שני מטבעות זהב בדיוק.