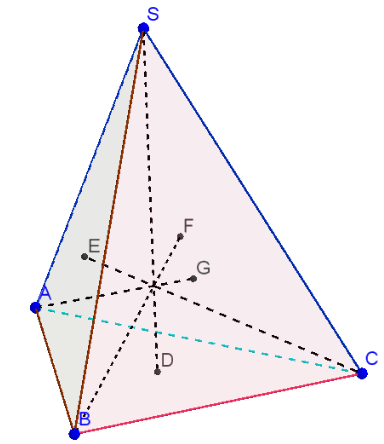
מציאת יחס חלוקה – יחידות ההצגה של ווקטורים

בעיית המטרה

$SABC$ היא פירמידה משולשת. הנקודות D E, F, G הן נקודות המפגש של התיכונים בפאות ABC, SAB, SAC, SBC בהתאמה.

הוכיחו כי כל ארבעת הקטעים: SD, CE, BF, AG נחתכים בנקודה אחת, ומצאו את היחס בו הם מחלקים זה את זה.



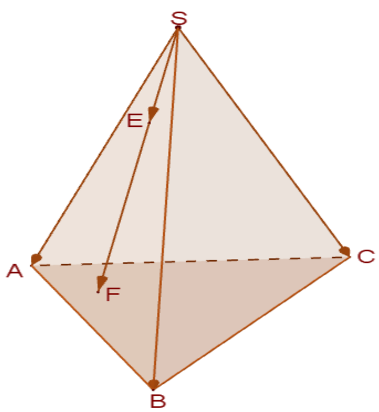
עברו לפיתרון בעית אתגר. מופיעה לאחר מדרגה 3.

במידת הצורך פתרו את הבעיות במדרגה *1*

מדרגה 1

נתון טטראדר (פירמידה משולשת) $SABC$.

שימו לב: הטטראדר הוא גוף מרחבי, על כן נוכל לבטא כל קטע בו באמצעות שלושה ווקטורים שאינם כפל בסקלר האחד של האחר.



נסמן : $\overrightarrow{SA}=\underline{u}$, $\overrightarrow{SB}=\underline{v}$, $\overrightarrow{SC}=\underline{w}$,

הנקודה E מקיימת: $\overrightarrow{SE}=\frac{1}{9}\underline{u}+\frac{1}{12}\underline{v}+\frac{1}{18}\underline{w}$

המשך SE חותך את המישור ABC ב– F.

נסמן : $\overrightarrow{SF}=t\overrightarrow{SE}$, $\overrightarrow{AF}=l\overrightarrow{AC}+k\overrightarrow{AB}$

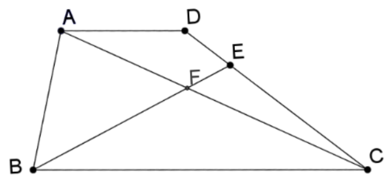
1.1 הביעו את $\overrightarrow{SF}$ בשתי דרכים.

1.2 מצאו את t.

1.3 חשבו את היחס $\frac{SF}{SE}$.

פתרתם את הבעיות במדרגה *1* ? חזרו לבעיית המטרה, או,
במידת הצורך, פתרו את הבעיות במדרגה 2

מדרגה 2



בטרפז $ABCD$ $(AD||BC)$, הקטעים AC ו-BE נחתכים בנקודה F.

מתקיים: $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{DC}$.

נסמן: $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BA} = \underline{v}$, $\overrightarrow{BF} = t\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AF} = m\overrightarrow{AC}$.

2.1 בטאו את $\overrightarrow{AF}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- m.

2.2 בטאו את $\overrightarrow{BF}$ בשתי דרכים:

פעם אחת באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו-t . ופעם אחת באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו-m.

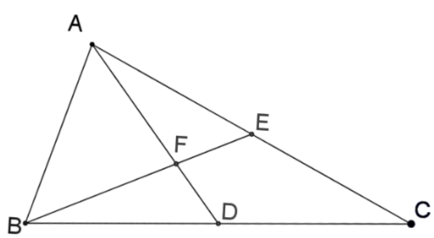
מצאו, באמצעות חשבון ווקטורים:

2.3 את היחס בו מחלקת הנקודה F את הקטע AC : $\frac{AF}{FC}$

2.4 את היחס בו מחלקת הנקודה F את הקטע BE : $\frac{BF}{FE}$

אחרי שפתרתם את הבעיות במדרגה 2, פתרו את בעיית המטרה, או,
במידת הצורך, פתרו את הבעיות במדרגה 3

מדרגה 3



במשולש ABC, הקטעים AD, ו-BE הם תיכונים.

הסבירו מדוע התיכונים בהכרח נחתכים.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{BF} = t\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AF} = m\overrightarrow{AD}$.

שימו לב: המשולש הוא גוף מישורי, על כן נוכל לבטא כל קטע בו
באמצעות שני ווקטורים שאינם כפל בסקלר האחד של האחר.

3.1 בטאו את $\overrightarrow{BF}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו-t.

3.2 בטאו את $\overrightarrow{AF}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו-m.

3.3 בטאו את $\overrightarrow{BF}$ בשתי דרכים:

פעם אחת באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו-t. ופעם אחת באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו-m.

השוו את שתי ההצגות של $\overrightarrow{BF}$ והסיקו את יחס החלוקה.

3.4 מצאו, באמצעות חשבון ווקטורים, את יחסי החלוקה: $\frac{BF}{BE}$ ו- $\frac{AF}{AD}$.

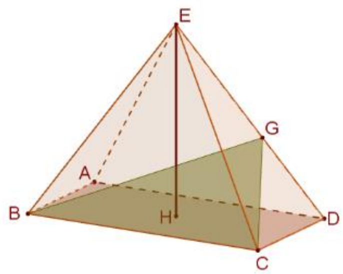
אחרי שפתרתם את הבעיות במדרגה 3 פתרו את בעיית המטרה

בעית אתגר – מישור חותך ישר

$ABCDE$ היא פירמידה ישרה שבסיסה הוא מלבן.

הנקודה G נמצאת על המקצוע ED, כך שמתקיים: $\overrightarrow{DG} = m\overrightarrow{DE}$.

המישור שנקבע על-ידי הנקודות B, C, G, חותך את גובה הפירמידה EH. H עקב הגובה במישור $ABCD$.
נתון כי: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{EH} = \underline{w}$.



סמנו את נקודת החיתוך של המישור BCG עם הגובה EH ב-x.

מטרתכם: למצוא את יחס החלוקה בין חלקי הגובה בהתאם לערכו של m.

(1) בחרו קטע אותו תרצו לבטא בשתי דרכים שונות.
(2) הגדירו פרמטרים, ובטאו באמצעותם בשתי דרכים שונות את הקטע שבחרתם.

תנו דעתכם: מהו הביטוי האלגברי לעובדה שהנקודה x נמצאת במישור BCG?

(3) השתמשו בהצגות השונות ומצאו את יחס החלוקה בין חלקי הגובה בהתאם לערכו של m.
(4) תארו את מקומה של הנקודה x במישור.

אם התקשיתם, תוכלו להציב, למשל, $m = \frac{1}{2}$, ולפתור את הבעיה במקרה פרטי זה.