קשר בין אלכסוני מרובע לצלעותיו

חומר לימוד: חזרה וביסוס של הידע בגיאומטריה ואפשרות של שילוב עם טריגונומטריה ומשפט הקוסינוסים.

כיתה: י' (בסיום גיאומטריה) או י"א

מבנה המשימה: בעיית מטרה אחת ושלוש מדרגות.

ידע קודם: הפעילות מתאימה לשימוש באחד משני שלבים בהוראה:

- בסיום לימודי הגיאומטריה ללא שילוב הוכחות בעזרת טריגונומטריה כאשר מעוניינים לדון בתכונות מרובעים, משפט פיתגורס, שטח של מרובע שאלכסוניו מאונכים, ותכונות מרובע חסום במעגל.
- לתרגול יישומי טריגונומטריה במישור: משפט פיתגורס ו/או משפט הקוסינוסים.

מטרות לימודיות: הפעילות מאפשרת

- חזרה, ביסוס והעמקה של מכלול הידע בגיאומטריה.
- פתרון חלק מהבעיות בדרכים נוספות הנעזרות בכלים טריגונומטריים.
- פתרון שאלות בדרכים שונות וקישור בין שני התחומים.

משימת המטרה: בבעיה ארבעה סעיפים הקשורים למלבן, טרפז שווה שוקיים ודלתון.

מדרגה 1: שאלה אחת פרמטרית בטרפז שווה שוקיים בה יש להביע את אלכסון הטרפז.

מדרגה 2: שתי שאלות: אחת בטרפז שווה שוקיים פשוטה יותר ואחת בדלתון.

מדרגה 3: שלוש שאלות: שתיים בטרפז שווה שוקיים המשלבות מספרים עם פרמטרים ואחת בדלתון.

שיטת הוראה:

בכיתה: התלמידים יעבדו (רצוי בזוגות) בהתאם למדרגה בה הם בוחרים או בהתאם להכוונת המורה. בדיון הכיתתי תלמידים יציגו דרכים שונות לפתרון השאלות.

הערה: המשימה "משפט תלמי" היא משימת המשך למשימה זו.

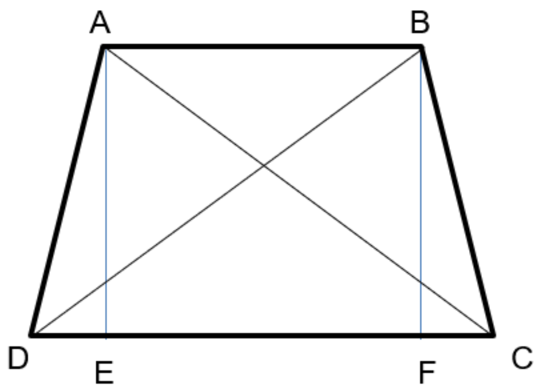
משימה זו מתמקדת בהוכחת המשפט: אם ניתן לחסום מרובע במעגל, אז מכפלת האורכים של אלכסוניו שווה לסכום המכפלות של אורכי הצלעות הנגדיות שלו ובשאלות נוספות בהן ניתן ליישם משפט זה.

<u>פתרונות חלקיים:</u>

הצעות להוכחה שבטרפז שווה שוקיים הטענה מתקיימת:

צ"ל : $AC \cdot BD = AD \cdot BC + DC \cdot AB$

<u>דרך א (ללא טריגונומטריה)</u>



בנית עזר: AE אנך ל DC ו BF אנך ל DC, ניתן להוכיח כי:

$$DE = FC = 0.5 \cdot (DC - AB)$$

משפט פיתגורס ב- ΔADE:

$$AE^2 = AD^2 - DE^2 = AD^2 - 0.25(DC - AB)^2 =$$
$$AD^2 - 0.25DC^2 + 0.5AB \cdot DC - 0.25AB^2$$

משפט פיתגורס ב- ΔAEC:

$$EC = AB + FC = 0.5 \cdot (AB + DC)$$
$$AE^2 = AC^2 - EC^2 = AC^2 - 0.25(AB + DC)^2 =$$
$$AC^2 - 0.25AB^2 - 0.5AB \cdot DC - 0.25DC^2$$

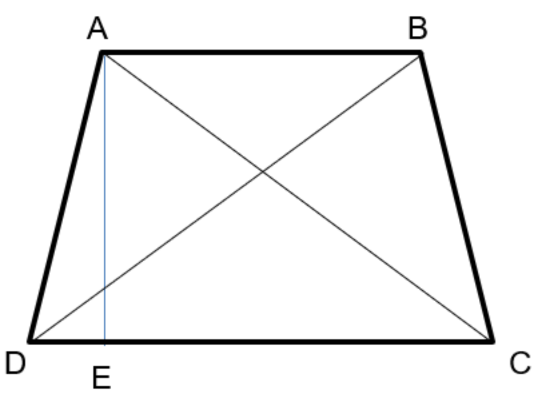
לכן:

$$AC^2 - 0.25AB^2 - 0.5AB \cdot DC - 0.25DC^2 = AD^2 - 0.25DC^2 + 0.5AB \cdot DC - 0.25AB^2$$
$$AC^2 = AD^2 + AB \cdot DC$$

בטרפז שווה שוקיים השוקיים שוות לכן $AD^2 = AD \cdot BC$,

והאלכסונים בטרפז שווה שוקיים שווים זה לזה לכן $AC^2 = AC \cdot BD$

נקבל: $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot DC$



<u>דרך ב (בעזרת טריגונומטריה)</u>

הצעה להוכחה שבטרפז שווה שוקיים הטענה מתקיימת:

צ"ל : $AC \cdot BD = AD \cdot BC + DC \cdot AB$

הוכחה:

בנית עזר: AE אנך ל DC

על פי משפט הקוסינוסים במשולש ADC:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos \sphericalangle ADC$$
$$DE = 0.5 \cdot (DC - AB)$$

במשולש ישר זווית ADE:

$$\cos\sphericalangle ADC = \frac{0.5(DC - AB)}{AD}$$

לכן: $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \frac{0.5(DC-AB)}{AD}$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - DC^2 + DC \cdot AB$$

$$AC^2 = AD^2 + DC \cdot AB$$

בטרפז שווה שוקיים השוקיים שוות $AD = BC$ והאלכסונים שווים זה לזה $AC = BD$.

לכן: $AC \cdot BD = AD \cdot BC + DC \cdot AB$